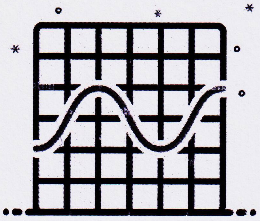
Chapitre 6 : Analyse des circuits électriques en régime sinusoïdal

I. Introduction

Les régimes sinusoïdaux sont essentiels en électricité car la plupart de l'énergie électrique mondiale est produite et distribuée sous forme de tensions sinusoïdales.

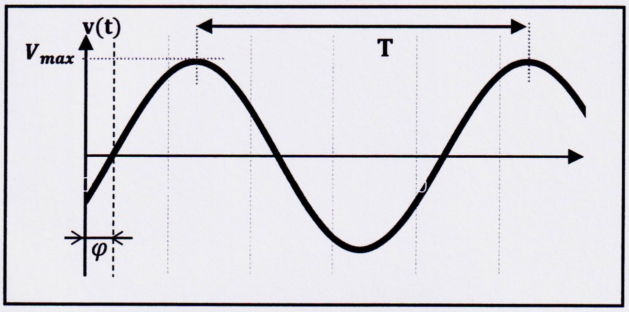
L'étude de ces régimes implique l'analyse de réseaux électriques composés de dipôles passifs linéaires alimentés par des sources sinusoïdales, avec des signaux de même fréquence mais déphasés.



II. Représentation d'une grandeur alternative sinusoïdale

1. Représentation temporelle d'une tension alternative sinusoïdale

Une tension alternative sinusoïdale est définie par : $v(t) = V_{max}\ \sin(\omega\, t - \varphi)$. Voici leur représentation temporelle :



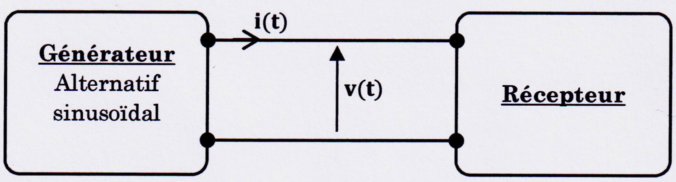
Avec :
- V_{max} : Amplitude maximale en V
- ω : Pulsation en rad/s
- t : Temps en s
- φ : Phase à l'origine en rad
- $\omega t + \varphi$: Phase à l'instant t en rad
- T : Période du signal en s

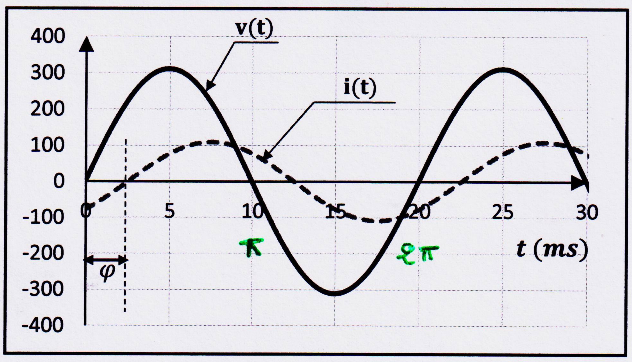
Relations essentielles de base :

Pulsation et fréquence	Fréquence et la période	Valeur maximale et valeur efficace
$\omega = 2\pi \cdot f$ [rad/s]	$f = \frac{1}{T}$ [Hz]	$V_{max} = \sqrt{2} \cdot V$

2. Récepteur électrique en régime alternatif sinusoïdal

La majorité des récepteurs électriques alimentés par une tension sinusoïdale ont une tendance inductive. Par conséquent, dans la plupart des cas, ***le courant i(t) traversant un dipôle est en retard par rapport à la tension u(t)***.





- **Question 1** : A partir du graphe de tension et de courant, mesurer :

Valeur maximale de tension Vmax	Valeur maximale de courant Imax	La période T	Le déphasage φ
$V_{max} = 310\ V$	$I_{max} = 100\ A$	$T = 20\ ms$	$\varphi = 2.5 \cdot \frac{2\pi}{20} = 0.78\ rad$

- **Question 2** : En déduire : la valeur efficace de tension V et de courant I et la fréquence F du générateur v(t).

tension efficace V : $\boxed{V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \boxed{V = 220V}$ | le courant efficace : $\boxed{I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \boxed{I = 70.71A}$ | La fréquence F : $\boxed{F = \frac{1}{T}} \Rightarrow \boxed{F = 50Hz}$

La résolution des problèmes en régime temporel reste toujours complexe et même si possible, il prend beaucoup de temps !

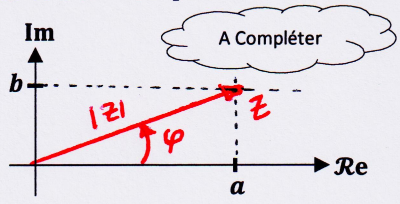
3. Représentation complexe des grandeurs sinusoïdales

Cette méthode est parfaitement adaptée à l'utilisation d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul mathématique. Elle permet d'obtenir des résultats précis pour le calcul de la somme des signaux. Cependant, elle nécessite une bonne maîtrise du cours sur les nombres complexes en mathématiques.

Rappel mathématique : *les nombres complexes*

Soit $Z = a + j\,b$, un nombre complexe avec $Z \in \mathbb{C}$ et nous supposons que les variables a et b sont positives

- Module de Z : $r = |Z| =$ $\sqrt{a^2+b^2}$
- Argument de Z : $\varphi = \arg(Z) =$ $\text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$
- Représentation vectorielle de Z (voir ci-contre)



Différentes formes pour écrire le complexe Z :

- **Forme Trigonométrique : $Z = r\,(\cos(\varphi) + j\,.\sin(\varphi))$**
- **Forme polaire : $Z = [r,\ \varphi]$**
- **Forme exponentielle : $Z = r\,e^{j\varphi}$.**

Remarque : *La forme exponentielle est la plus couramment utilisée en électricité et sera employée dans la suite du cours.*

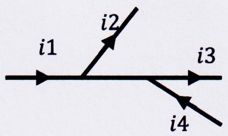
Pour transformer une représentation temporelle en une représentation complexe, on applique la formule suivante :

$v(t) = V.\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \varphi)$ ⇨ $\underline{V} = V\,.e^{j\varphi}$ ou $\underline{V} = V_{max}\,.e^{j\varphi}$ avec $V_{max} = V.\sqrt{2}$

⚠ *Notation pour définir une grandeur complexe à ne pas oublier !!!*

Exemple 1 : Lois de nœuds en régime alternatif

Soient quatre conducteurs reliés entre eux et parcourus par des courants alternatifs sinusoïdaux de même fréquence.



$i2(t) = 2.\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad \underline{I2} = 2\,.e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$i3(t) = 4.\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ ⇨ $\underline{I3} = 4.\,e^{+j\frac{\pi}{6}}$

$i4(t) = 3.\sqrt{2}\ \sin(\omega t)$ $\qquad \underline{I4} = 3\,e^{j0} = 3$

- Question : En utilisant les complexes et la calculatrice. Calculer $i1(t)$.

d'aprés la loi des nœuds :

$\Rightarrow i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \Rightarrow i_1 = i_2 + i\ \ - i_4$

Complexe : $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_4$

$\Leftrightarrow \underline{I}_1 = 2\,e^{-j\pi/4} + 4\,e^{j\pi/6} - 3$

$\Leftrightarrow \underline{I}_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\sin\frac{\pi}{4}\right] + 4\left[\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right] - 3$

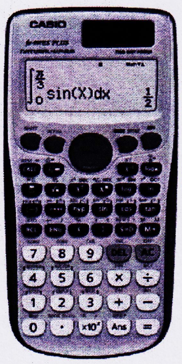
$\Leftrightarrow \underline{I}_1 = 1.88 + j\,0.585$

$I_1 = \sqrt{1.88^2 + 0.58^2} = 1.96\,A$; $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{0.58}{1.88}\right) = 17.32°$

$\Rightarrow i_1(t) = 1{,}96\sqrt{2}\ \sin(\omega t + 17{,}32°)$

Utilisation de la calculatrice scientifique cas de CASION fx-991ES PLUS pour résoudre ce problème.

- **Etape 1 (choisir le mode complexe)** : pressez sur (**MODE**) puis (**2**) et le calculatrice en (**DEG**)



- **Etape 2** : écrire les formes polaires pour l'équation de nœuds ($\underline{I2} = 2\,.e^{-j\frac{\pi}{4}} = [2, -45]$)

  $\underline{I1} = [2, -45] + [4, 30] - [3,\ 0]$ ⇨ 2 SHIFT (−)(∠) − 45 + 4 SHIFT (−)(∠) 30 − 3 SHIFT (−)(∠) 0 =

  Résultats : 1.878 + 0.586 i

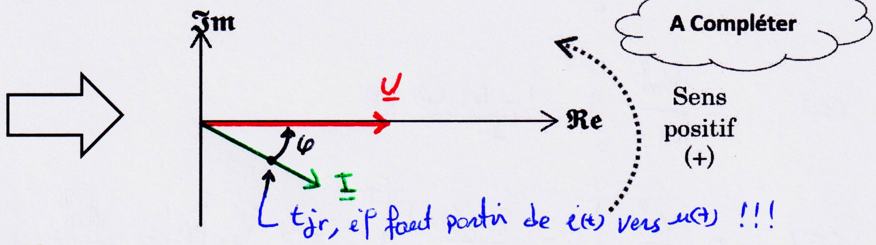
- **Etape 3 :** Convertir cette valeur vers le format polaire ainsi : SHIFT 2 3 =

  Résultats : $\underline{I1} = [1.96,\ 17.32]$ ⇨ $i1(t) = 1.96\,.\sqrt{2}\ \sin(\omega t + 17.32°)$

4. Représentation vectorielle (diagramme de Fresnel)

Cette méthode, utilisée par les oscilloscopes et certains logiciels, n'est pas très pratique pour les calculs manuels. En général, nous l'employons uniquement pour estimer approximativement la somme. Le calcul précis sera effectué à l'aide d'une calculatrice en utilisant la méthode des complexes.

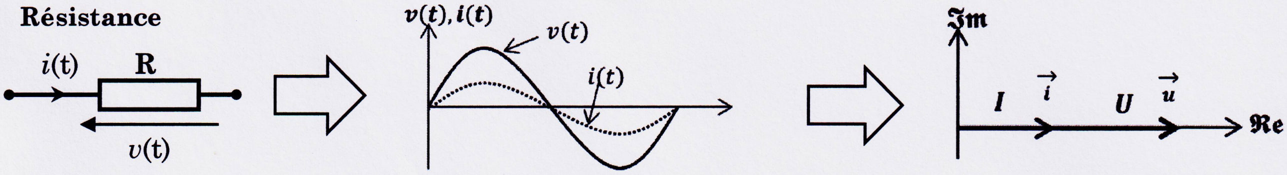
- $u(t) = U.\sqrt{2}\ sin(\omega t)$
- $i(t) = I.\sqrt{2}\ sin(\omega t - \varphi)$



III. Dipôles passifs en régime alternatif

Les dipôles passifs en régime alternatif sont des composants électriques (Résistances, Condensateurs et Inductances) qui ne génèrent pas d'énergie mais modifient les caractéristiques du courant et de la tension dans un circuit en fonction de leur impédance.

1. Résistance

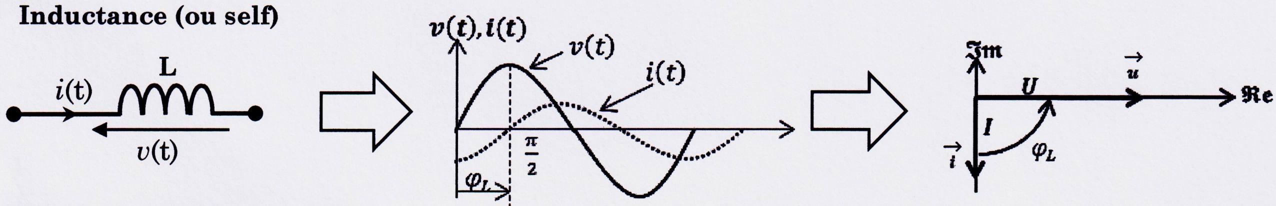


Relations essentielles :

Impédance $\underline{Z}$	Module de $\underline{Z}$	La phase de $\underline{Z}$	Relation temporelle u(t)	Relation complexe $\underline{U}$
$\underline{Z}_R = R$	$\lvert\underline{Z}_R\rvert = R$	$\varphi_R = 0$	$u(t) = R\,i(t)$	$\underline{U} = R\,\underline{I}$

Remarque : *Le déphasage entre la tension et le courant est nul, ce qui signifie qu'ils sont en phase.*

2. Inductance (ou self)

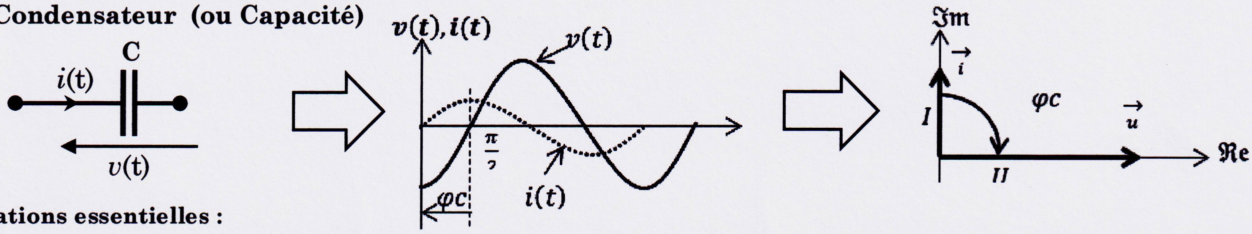


Relations essentielles :

Impédance $\underline{Z}$	Module de $\underline{Z}$	La phase de $\underline{Z}$	Relation temporelle u(t)	Relation complexe $\underline{U}$
$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\lvert\underline{Z}_L\rvert = L\omega$	$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$	$u_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}$	$\underline{U} = L\omega\,\underline{I}$

Remarque : Le déphasage entre la tension et le courant est $\frac{\pi}{2}$, ⇒ le courant est en retard par rapport à la tension.

3. Condensateur (ou Capacité)



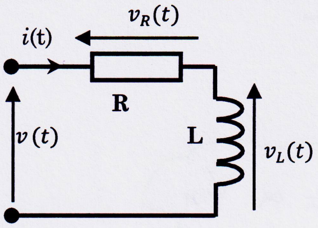
Relations essentielles :

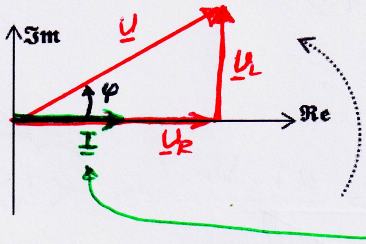
Impédance $\underline{Z}$	Module de $\underline{Z}$	La phase de $\underline{Z}$	Relation temporelle u(t)	Relation complexe $\underline{U}$
$\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega}$	$\lvert\underline{Z}_c\rvert = \frac{1}{C\omega}$	$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$	$i_c(t) = C\,\frac{du_c(t)}{dt}$	$\underline{U}_c = \frac{\underline{I}}{C\omega}$

Remarque : Le déphasage entre la tension et le courant, est $-\frac{\pi}{2}$, ⇒ le courant est en avance par rapport à la tension.

Exemple 2 : Traçage de diagramme de Fresnel

Question : Tracer le diagramme de Fresnel pour les différents schémas suivants (l'échelle des vecteurs est aléatoire)

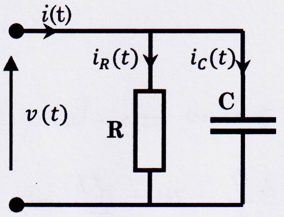


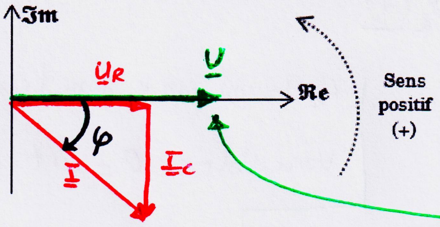


La phase : $\varphi > 0$

Type de charge : inductive

⚠ le courant est commun et est pris comme origine des phase.





La phase : $\varphi < 0$

Type de charge : capacitive

⚠ la tension est commune, on la prend comme origine des phases

IV. Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal périodique

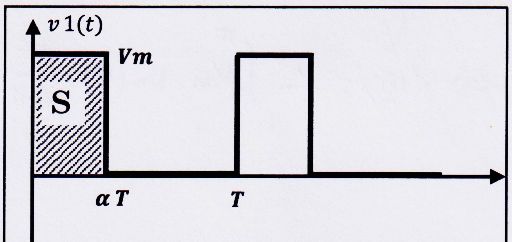
1. Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal périodique est la moyenne arithmétique de ses valeurs sur une période, indiquant la composante continue et essentielle pour l'analyse des circuits en électricité.

La valeur moyenne est exprimée par :

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt = \frac{\text{Surface}}{T} \quad \text{Avec } \textbf{Surface} = \int_0^T v(t)\,dt$$

N.B : Lorsqu'un signal est de type rectangulaire (ou carré) ou triangulaire, il est préférable de calculer la surface pour déterminer la valeur moyenne.



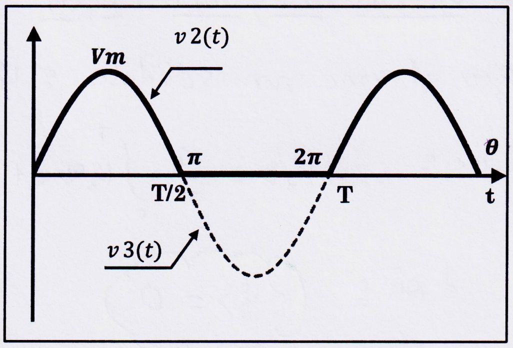
Surface = $\alpha.T \times V_m$

Pour les signaux s'exprimant en fonction de sin(ωt) ou cos(ωt), on effectue généralement le changement de variable suivant :

$$\theta = \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{T}{2\pi}\, d\theta$$

Donc :

$$\langle v(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)\,d\theta$$



Question : déterminer la valeur moyenne des trois signaux

⟨v1⟩	⟨v2⟩	⟨v3⟩
$\langle v_1 \rangle = \alpha.V_m$	$\langle v_2 \rangle = \frac{V_m}{\pi}$	$\langle v_3 \rangle = 0$

Voir annexe, pour voir la demonstration

2. La valeur efficace

La valeur efficace d'un signal est la mesure de sa puissance moyenne équivalente, souvent utilisée pour évaluer l'intensité des signaux alternatifs comme le courant ou la tension. Elle s'exprime par :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2\,dt} = \sqrt{\langle v(t)^2 \rangle} \quad \text{ou} \quad V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^T v(\theta)^2\,d\theta} = \sqrt{\langle v(\theta)^2 \rangle}$$

Question : exprimer la valeur efficace V2 du signal de v2(t)

$$V_{eff_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (V_m.\sin\theta)^2 d\theta \Rightarrow \boxed{V_{eff_2} = \frac{V_m}{2}} \Rightarrow \text{Voir demonstration}$$

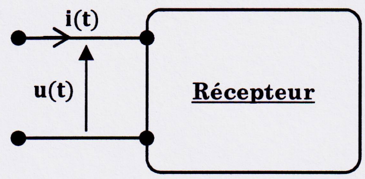
V. La puissance électrique en régime alternatif sinusoïdal

La puissance électrique est la quantité d'énergie transférée par un circuit électrique par unité de temps. Elle est mesurée en watts (W) et calculée comme le produit de la tension (en volts) et du courant (en ampères). En régime alternatif, elle prend en compte le facteur de puissance, représentant l'efficacité de la conversion de l'énergie électrique en travail utile.

1. La puissance instantanée

On considère un récepteur électrique ci-après traversé par un courant i(t) et soumis à une tension alternative sinusoïdale.

Soit : $u(t) = U.\sqrt{2}\ \sin(\omega t)$ et $i(t) = I.\sqrt{2}\ \sin(\omega t - \varphi)$



La puissance instantanée est définie par : $\boldsymbol{p(t) = u(t).i(t)}$

$\mathbf{p(t) = 2\,U.I.\sin(\omega t).\sin(\omega t - \varphi)}$

2. La puissance active P.

La puissance active est la partie de la puissance électrique qui effectue un travail utile dans un circuit, mesurée en watts **(W),** elle est définie par la puissance moyenne de la puissance instantanée : $\mathbf{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt}$

$P = U.I.\cos(\varphi)$

3. La puissance réactive Q

La puissance réactive est la partie de la puissance électrique qui oscille entre la source et la charge sans effectuer de travail utile, mesurée en volt-ampères réactifs **(VAR)**, elle est définie par :

$Q = U.I.\sin(\varphi)$

4. La puissance apparente S

La puissance apparente, aussi appelée puissance de dimensionnement, est la combinaison de la puissance active et réactive dans un circuit, représentant la puissance totale fournie. Elle est mesurée en volt-ampères **(VA) :** $\underline{S} = P + j\,Q$

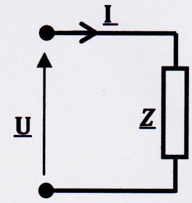
Elle est définie par : $S = U.I$

VI. Puissance de dipôles passifs en régime alternatif sinusoïdal

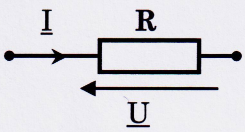
On considère un dipôle passif (Résistance, inductance, Capacité) traversé par un courant i(t) et soumis à une tension alternative sinusoïdale : $\underline{U} = \underline{Z}\,.\,\underline{I}$

Les puissance active et réactive sont alors définies par :

Puissance active Pz	$Pz = \lvert\underline{Z}\rvert.I^2.\cos(\varphi)$	ou	$Pz = \frac{U^2}{\lvert\underline{Z}\rvert}.\cos(\varphi)$
Puissance réactive Qz	$Qz = \lvert\underline{Z}\rvert.I^2.\sin(\varphi)$	ou	$Qz = \frac{U^2}{\lvert\underline{Z}\rvert}.\sin(\varphi)$

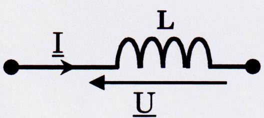


1. Résistance



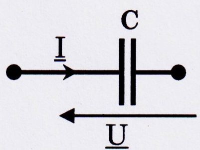
Puissance active P_R		Puissance réactive Q_R
$P_R = R.I^2$	$P_R = \frac{U^2}{R}$	0

2. Inductance



Puissance réactive Q_L		Puissance active P_L
$Q_L = L.\omega.I^2$	$Q_L = \frac{U^2}{L\omega}$	0

3. Capacité



Puissance réactive Q_C		Puissance active P_C
$Q_c = \frac{-I^2}{C.\omega}$	$Q_c = -C.\omega.U^2$	0

Remarques :

- *La **puissance active** est toujours dissipée dans les éléments **résistifs** (résistances).*
- *La **puissance réactive** est toujours dissipée dans les éléments **réactifs** (bobines et condensateurs).*
- *Si $\mathbf{Q > 0}$: le récepteur **consomme** de la puissance réactive, ce qui indique une tendance **inductive**.*
- *Si $\mathbf{Q < 0}$: le récepteur **fournit** de la puissance réactive, ce qui indique une tendance **capacitive**.*

VII. Efficacité d'un circuit électrique en régime alternatif sinusoïdal

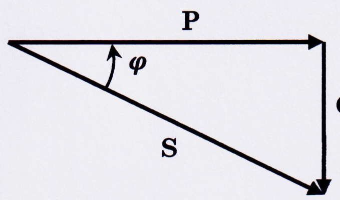
1. Facteur de puissance

Le facteur de puissance, représentant le rapport entre la puissance active et la puissance apparente, indique l'efficacité d'un circuit électrique. Il mesure la proportion d'énergie utilisée pour effectuer un travail utile par rapport à l'énergie totale fournie, influençant la performance et les pertes du système. Il s'exprime par : $\boxed{f_p = \frac{P}{S}}$

Ce facteur est inférieur à 1 ou égal à 1

Rq : Régime alternatif sinusoïdal $\Rightarrow f_p = \cos\varphi$

Le triangle de puissance est défini comme un moyen de relier les différentes formes de puissance.



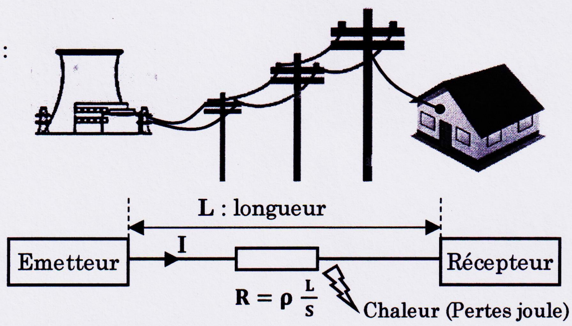
$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$

$\sin(\varphi) = \frac{Q}{S}$ $\tan(\varphi) = \frac{Q}{P}$

2. Effet de la chute de facteur de puissance

Effets de la chute du facteur de puissance dans les circuits électriques :

- Augmentation des pertes énergétiques dans les conducteurs.
- Surchauffe des équipements et des câbles.
- Réduction de la capacité du système de distribution.
- Augmentation des coûts d'exploitation.
- Diminution de l'efficacité globale du système électrique.
- Nécessité d'installations plus robustes et coûteuses.
- Baisse de la stabilité du réseau électrique.

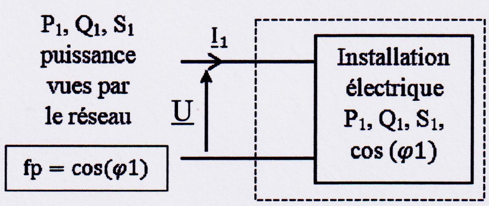


Pertes joule : $P_j = R\,I^2$

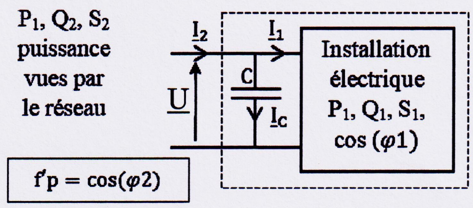
3. Relèvement du facteur de puissance (solution)

Le fournisseur de l'électricité (ONE) impose donc un facteur de puissance minimal à respecter, faute de quoi l'entreprise est taxée pour toute consommation de puissance réactive excédentaire ou bien d'installer un compensateur électrique.

Installation électrique avant compensation



Installation électrique après compensation



Remarque : *Cahier des charges impose le facteur de puissance demandé fp'*

D'après le théorème de Boucherot (traité dans le chapitre suivant), la puissance réactive de compensation Qc à installer est :

$Qc = Q_2 - Q_1$ ➔ $-C.\omega.U^2 = P.(tg(\varphi_2) - tg(\varphi_1)) \Rightarrow C.\omega.U^2 = P.(tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2)$

Donc, l'expression du condensateur à installer : $\boxed{C = P.\frac{tg\,\varphi_1 - tg(\varphi_2)}{\omega U^2}}$

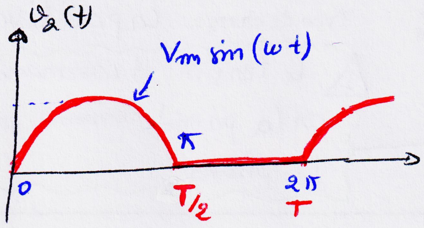
Calcul de la valeur moyenne

* **la valeur moyenne de $v_1(t)$**

$v_1(t)$ est une fonction carrée :

donc : $\langle v_1 \rangle = \dfrac{\text{surface}}{T} = \dfrac{\alpha T \cdot V_m}{T} \Rightarrow \langle v_1 \rangle = \alpha \cdot V_m$

* **la valeur moyenne $v_2(t)$**



$v_1(t)$ est une fonction en sinus $\Rightarrow$ changement de variable : $\theta = \omega t \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = \omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow dt = \dfrac{T}{2\pi} d\theta$

• changement des bornes

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \theta_0 = 0 \\ \frac{T}{2} \longrightarrow \theta_1 = \pi \end{cases} \Rightarrow \int_0^{T/2} \Rightarrow \int_0^{\pi}$$

$$\langle v_2(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v_2(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} v_2(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} V_m \cdot \sin(\omega t)\, dt$$

$$\Rightarrow \langle v_2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{\pi} V_m \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{T}{2\pi}\, d\theta \Rightarrow \langle v_2(\theta) \rangle = \frac{V_m}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$\Leftrightarrow \langle v_2 \rangle = \frac{V_m}{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{V_m}{2\pi}\left[\cos\theta\right]_{\pi}^{0}$$

$$\Leftrightarrow \langle v_2 \rangle = \frac{V_m}{2\pi}(1 - \cos\pi) \Rightarrow \langle v_2 \rangle = \frac{V_m}{\pi}$$

* **la valeur moyenne $v_3(t)$**

$v_3(t)$ est une sinusoïdale : $v_3(t) = V_m \sin(\omega t)$

donc : $\langle v_3 \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v_3(t)\, dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_m \sin(\theta)\, d\theta = \dfrac{V_m}{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi} = \dfrac{V_m}{2\pi}\left[\cos\theta\right]_{2\pi}^{0}$

d'où : $\langle v_3 \rangle = 0$

⚠ tjrs un signal sinusoïdal, a une valeur moyenne nulle !!!

2/ la valeur efficace de $v_2(t)$

après le changement de variable :

$$v_{2eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V_m^2 \cdot \sin^2\theta \, d\theta \qquad \text{avec} \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{V_m^2}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{V_m^2}{4\pi}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi} \Rightarrow V_{2eff}^2 = \frac{V_m^2}{4\pi}(\pi - 0 - 0 + 0) = \frac{V_m^2}{4}$$

d'où : $V_{2eff} = \sqrt{\frac{V_m^2}{4}} \Rightarrow V_{2eff} = \frac{V_m}{2}$